Interrogation de rentrée

Solution de l'exercice 1.

$$\begin{aligned}A &= (-2\times 3-4)\times[-2+3\times(-4)]\\ &= (-6-4)\times(-2-12)\\ &= (-10)\times(-14)\\ A &= 140.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{15}{4}\times\frac{48}{16}\\ &= \frac{15\times 48}{4\times 16}\\ &= \frac{15\times 4\times 12}{4\times 16}\\ &= \frac{15\times 12}{16}\\ &= \frac{15\times 4\times 3}{4\times 4}\\ &= \frac{15\times 3}{4}\\ B &= \frac{45}{4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{7}{6}\\ &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{7}{6}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{6}{6}+\frac{7}{6}\right)\\ &= \frac{1}{4}\frac{13}{6}\\ &= \frac{13}{6\times 4}\\ C &= \frac{13}{24}.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2. Soit x un réel.

$$\begin{aligned}D &= (8x+1)(x-4)-(x-2)(2x-3)\\ &= \left(8x^2-32x+x-4\right)-\left(2x^2-3x-4x+6\right)\\ &= 8x^2-31x-4-2x^2+7x-6\\ D &= 6x^2-24x-10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= (4x-3)^2\\ E &= 4^2x^2-2\times 4\times 3x-3^2\\ E &= 16x^2-24x-9.\end{aligned}$$

Pour x un réel fixé, développer et réduire les expressions suivantes :

$$D=(8x+1)(x-4)-(x-2)(2x-3)\ ; \qquad E=(4x-3)^2.$$

Solution de l'exercice 3. Soit t un réel.

$$F=4t^2-4t=4t\times t-4t\times 1=4t\,(t-1)\,.$$

Solution de l'exercice 4. Soit x un réel.

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 8x-7=-12x+3\\ &\Leftrightarrow 8x+12x=3+7\\ &\Leftrightarrow 20x=10\\ &\Leftrightarrow x=\frac{10}{20}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow -2x-5\leqslant 3\\ &\Leftrightarrow -2x\leqslant 3+5\\ &\Leftrightarrow -2x\leqslant 8\\ &\Leftrightarrow x\geqslant \frac{8}{-2}\\ &\Leftrightarrow x\geqslant -4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow x^2-12=0\\ &\Leftrightarrow x^2=12\\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{12} \text{ ou } x=-\sqrt{12}\\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{4\times 3} \text{ ou } x=-\sqrt{4\times 3}\\ &\Leftrightarrow x=2\sqrt{3} \text{ ou } x=-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Il était également bienvenu d'écrire que l'ensemble des solutions de (1) est donné par $\mathscr{S}_{(1)}=\{1/2\}$. L'ensemble des solutions de (2) est donné par $\mathscr{S}_{(2)}=[-4;+\infty[$. L'ensemble des solutions de (3) est donné par $\mathscr{S}_{(3)}=\{-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\}$.

Solution de l'exercice 5. Ecrire sous la forme d'un nombre décimal

$$G=10^{-1}+10^2=0,1+100=100,1.$$

Solution de l'exercice 6. On commence par calculer la longueur HB. Puisque A, H et B sont alignés,

$$HB=AB-AH=60-20=40.$$

Puisque (CH) est la hauteur issue de C, on sait que (CH) est perpendiculaire à (AB) et donc le triangle CHB est rectangle en H. Ainsi par le théorème de Pythagore,

$$CB^2=CH^2+HB^2=30^2+40^2=900+1600=2500.$$

On en déduit que la distance CB (qui est positive bien entendu) vaut

$$CB=\sqrt{2500}=\sqrt{25\times 100}=\sqrt{25}\times\sqrt{100}=5\times 10=50.$$

Solution de l'exercice 7. Puisque (AB) et (IJ) sont parallèles, par le Théorème de Thalès, nous avons

$$\frac{AO}{AJ}=\frac{BO}{BI}=\frac{AB}{IJ}.$$

En particulier,

$$\frac{AO}{AJ}=\frac{BO}{BI}.$$

Or $AJ=AO+OJ=300+600=900$ m. Et donc

$$\frac{BO}{BI}=\frac{600}{BI}=\frac{300}{900}=\frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$BI = 600 \times 3 = 1800\ m.$$

Solution de l'exercice 8. Soient f et g deux fonctions définies respectivement par

$$f(x) = -3x \qquad \text{et} \qquad g(x) = 3x + 1,$$

pour tout réel x.

1. La fonction f est linéaire et donc en particulier affine.
2. La fonction g est affine mais pas linéaire.
3.

x	-2	1	0	$-1/3$
$f(x)$	-6	-3	0	3

x	-2	0	$-1/3$	$-2/3$
$g(x)$	-5	1	0	-1

car

$$\begin{aligned}
&f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\\
&f(x) = 1 \Leftrightarrow -3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3},\\
&g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3},\\
&g(x) = -1 \Leftrightarrow 3x + 1 = -1 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{3}.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 9. Soit x et y deux réels. On a

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{ll} 2x + y & = 2 \\ 5x + 3y & = 7 \end{array}\right.
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 2 - 2x \\ 5x + 3y = 7 \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 2 - 2x \\ 5x + 3(2 - 2x) = 7 \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 2 - 2x \\ 5x + 6 - 6x = 7 \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 2 - 2x \\ -x = 7 - 6 = 1 \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 + 2 = 4. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Le couple solution est donc $(-1; 4)$.